7/1/2019

Είδαμε περσι το Θ. Taylor → SOS!!

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $f \in C^k(U)$

[δηλ. $f: U \to \mathbb{R}$ $k (\in \mathbb{N}_0)$ φορές συνεχώς διαφορίσιμη]

Τότε $\forall \bar{x} \in U$ ισχύει $f(\bar{x}+\bar{u}) = T_{k,f,\bar{x}}(\bar{u}) + o(\|\bar{u}\|^k)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

όπου $T_{k,f,\bar{x}}(\bar{u}) = \sum_{|a| \leq k} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f στο $\bar{x}$.

Ειδικότερα: α. $f \in \underbrace{C(U)}_{=C^0(U)} \Rightarrow f(\bar{x}+\bar{u}) = f(\bar{x}) + o(1)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

$(\Leftrightarrow) \lim_{\bar{u} \to \bar{0}} (f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x})) = \bar{0}$

β. $f \in C^1(U) \Rightarrow f(\bar{x}+\bar{u}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{u} + o(\|\bar{u}\|)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

γ. $f \in C^2(U) \Rightarrow f(\bar{x}+\bar{u}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{u} + \frac{1}{2} \bar{u}^T \cdot f(\bar{x}) \cdot \bar{u} + o(\|\bar{u}\|^2)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

όπου $H_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}) \end{pmatrix}$ $[= D^2 f(\bar{x})]$

↳ Ο Εσσιανός πίνακας της f στο $\bar{x}$

(που για $f \in C^2(U)$ είναι η δεύτερη παράγωγος της f στο $\bar{x}$)

Παραδείγματα:

1) Άσκηση 77: Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor δεύτερου βαθμού της $f(x,y) = e^{(x-1)^2} \cos y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Λύση: $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ [δηλ. η f είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη]

και έχουμε: $\nabla f(x,y) = \Big(\underbrace{e^{(x-1)^2}\cdot 2(x-1)\cos y}_{=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}, \underbrace{-e^{(x-1)^2}\sin y}_{=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}\Big)$

και $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} =$

Δω παίζει ρόλο η σειρά παραγώγισης (εδώ) θα έχω το ίδιο αποτελ. εδώ για να ισχύει αυτό θέλω τουλ. C^{2} φορές συνεχ. διαφ. έχω 2 μεταβλ.

$$= \dots = e^{(x-1)^2}\begin{pmatrix} (4(x-1)^2+2)\cdot\cos y & -2(x-1)\cdot\sin y \\ -2(x-1)\sin y & -\cos y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Θ. Taylor

$\Longrightarrow \underbrace{f(x,y)}_{=(x_0,y_0)+(x-x_0,y-y_0)} = f(x_0,y_0) + T_{2,f,(x_0,y_0)}(x-x_0,y-y_0)\, o\big((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\big)$ για $(x,y)\to(x_0,y_0)$

όπου $T_{2,f,(x_0,y_0)}(x-x_0,y-y_0) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}(x-x_0,y-y_0)\, Hf(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}$

Ειδικότερα για $(x_0,y_0)^{=(1,0)}$ έχουμε

$T_{2,f(1,0)}(x-1,y) = f(1,0) + \nabla f(1,0)\cdot(x-1,y) + \frac{1}{2}(x-1,y)\, Hf(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y\end{pmatrix}$

$o\big((x-1)^2+y^2\big)$ για $(x,y)\to(1,0)$

$$f(x,y) = 1 + (0,0)\cdot(x-1,y) + \frac{1}{2}(x-1,y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y\end{pmatrix} + o\big((x-1)^2+y^2\big)$$ για $(x,y)\to(1,0)$

$$= 1 + \frac{1}{2}\big(2(x-1)^2 - y^2\big) + o\big((x-1)^2+y^2\big)$$ για $(x,y)\to(1,0)$

<u>Παρατήρηση:</u> Το Θ. Taylor μπορεί να χρησιμεύσει και για υπολογισμό ορίων. <u>π.χ.</u> από το προηγ. αποτελ. παίρνουμε:

για $\Phi(x,y) = f(x,y) - 1 - \frac{1}{2}\left(2(x-1)^2 - y^2\right)$

ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\Phi(x,y)}{(x-1)^2+y^2} = 0$ δηλ. με $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$

έχουμε $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{e^{(x-1)^2}\cos y - 1 - (x-1)^2 + \frac{1}{2}y^2}{(x-1)^2+y^2} = 0$

Ασκήσεις Βλ. Σημ. Γ.Γ + Μ.Τ. και π.χ.

<u>Άσκηση:</u> Υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^y - x - (x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

[Υπόδειξη: Με $(u_1,u_2) = (x-1, y-1)$

Θέλουμε να βρούμε το $\lim\limits_{(u_1,u_2)\to(0,0)} \dfrac{\text{αριθμητής}}{\|(u_1,u_2)\|^2}$

Αν αριθμητής $= o\left(\|(u_1,u_2)\|^2\right)$ για $(u_1,u_2)\to(0,0)$

τότε $\lim\limits_{(u_1,u_2)\to(0,0)} \dfrac{\text{αριθμητής}}{\|(u_1,u_2)\|^2} = 0$

<u>Ίσως</u> (και πράγματι ισχύει) το όριο είναι 0, σύμφωνα με το Θ. Taylor για

$f(x,y) = x^y$ στο σημείο $(x_0,y_0) = (1,1)$ για $(x,y) \in (0,\infty)^2$

$= (e^{\ln x})^y = e^{y \cdot \ln x}$

Τοπικά και ολικά ακρότατα πραγμ. συνάρτησης πολλών μεταβλητών:

Ορισμός: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Η $f: U \to \mathbb{R}$ έχει στο σημείο $\bar{x} \in U$:

1. τοπικό ελάχιστο, αν $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon): f(\bar{y}) \geq f(\bar{x})$

2. γνήσιο τοπικό ελάχιστο, αν
$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}: f(\bar{y}) > f(\bar{x})$
3. ολικό ελάχιστο, αν $\forall \bar{y} \in U: f(\bar{y}) \geq f(\bar{x})$
4. γνήσιο ολικό ελάχιστο, αν $\forall \bar{y} \in U \setminus \{\bar{x}\}: f(\bar{y}) > f(\bar{x})$

Αντίστοιχα με "<" αντί για ">" ορίζονται τα (γνήσια) τοπικά ή ολικά μέγιστα.

Τα (τοπικά) ελάχιστα και/ή μέγιστα μιας συνάρτησης ονομάζονται ακρότατα. και τα $\bar{x}$ στα οποία η f έχει ακρότατο, ονομάζονται σημεία ακροτάτων.

Παρατήρηση: α. Κάθε ολικό ακρότατο (γνήσιο ή μη) είναι και τοπικό.
β. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν κανένα τοπικό ακρότατο.
π.χ. η $f(x,y) = x$ όπου $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δεν έχει ακρότατο
γ. Υπενθύμιση: Συνεχής εικόνα συμπαγούς είναι συμπαγής.